A l'attention des étudiants en classe préparatoire économique et commerciale.

Chers étudiants

Voici quelques exercices pour l'été et préparer au mieux la rentrée en mathématiques. L'expérience montre que la plupart des étudiants éprouvent des difficultés en calcul algébrique.
Le travail proposé ici doit vous permettre de progresser dans ce domaine. Il est entendu que ces exercices doivent être réalisés **sans calculatrice**.
Notez soigneusement les points que vous n'auriez pas compris. Nous en reparlerons à la rentrée.

Marie Girard
Professeur de mathématiques en ECE 1

Quelques symboles mathématiques :

$\in$: appartient à. $\notin$: n'appartient pas à.
$\subset$: est inclus dans. $\not\subset$: n'est pas inclus dans.
$\exists$: il existe. $\nexists$: il n'existe pas.
$\forall$: quelque soit.

Exemple : Soit $A = \{2,4,6,8\}$, B l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 10 et $C = [2;9]$. Alors :

- $4 \in A$, $\frac{3}{5} \notin B$, $\pi \in C$.
- $A \subset B$, $A \subset C$.
- $B \not\subset C$ car $1 \in B$ et $1 \notin C$.
- $\forall x \in A,\ x$ est pair.
- $\exists x \in B$ tel que x est pair.
- $\nexists x \in A$ tel que $x > 8$.

Ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire des entiers positifs : $0,1,2,3,\ldots$
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers : $\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers et $q \neq 0$.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Exemple : $10^5 \in \mathbb{N},\ -501 \in \mathbb{Z},\ -\frac{2}{5} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

ce qui signifie qu'un nombre naturel est un nombre entier lequel est un rationnel qui est un réel.

1) Les fractions

Soit a, b, c, d quatre réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b} \qquad \frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}.$$

Remarque : $\frac{a}{b}\cdot b=a$

I. Effectuer les additions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$\frac{4}{5}+\frac{3}{25}$; $\frac{2}{3}+1$; $\frac{7}{2}+2$; $\frac{5}{12}+\frac{11}{24}$; $\frac{2}{15}+\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$; $\left(\frac{2}{5}+2\right)+\left(\frac{2}{15}+3\right)+\frac{3}{10}$; $\left(\frac{4}{9}+2\right)+\frac{2}{3}+\left(2+\frac{1}{12}\right)$.

$\frac{a}{5}+\frac{3a}{5}+\frac{6a}{5}$; $3x+\frac{4x}{7}+\frac{x}{14}$; $a+\frac{5a}{11}+3a+\frac{6a}{11}$; $\frac{3x}{2y}+\frac{x}{3y}+\frac{5x}{2y}+\frac{2x}{3y}$.

II. Effectuer les soustractions suivantes et donner les résultats sous forme de fraction irréductible :

$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$; $\frac{15}{30}-\frac{3}{12}$; $\frac{18}{12}-\frac{15}{10}$; $\frac{5}{12}-\frac{7}{18}$; $\frac{17}{60}-\frac{17}{75}$; $\frac{4}{25}-\frac{11}{100}$.

$2-\frac{11}{8}$; $7-\frac{13}{15}$; $\frac{52}{15}-3$; $4-\frac{3}{4}$; $5-\frac{17}{5}$; $\frac{25}{6}-3$; $\frac{13}{4}-2$.

III. Effectuer les opérations suivantes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$\frac{3}{9}+\left(\frac{4}{8}+\frac{10}{12}\right)$; $\frac{4}{7}+\left(\frac{13}{28}-\frac{5}{14}\right)$; $\frac{6}{15}+\left(\frac{15}{20}+\frac{15}{27}\right)$; $2-\left(\frac{7}{15}-\frac{3}{30}\right)$; $\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)$; $2-\left(\frac{7}{15}-\frac{3}{30}\right)$.

$\left(\frac{7}{9}+5+\frac{3}{4}\right)-\left(3+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\right)$; $\frac{7a}{5}-\frac{2a}{5}$; $\frac{9a}{7}-\frac{2a}{7}$; $x-\frac{x}{5}$; $7a-\frac{5a}{6}$.

$\frac{11a}{5}-a$; $2+\frac{x}{y}-\frac{x}{3y}$; $\frac{2x}{3a}-\frac{x}{15a}+\frac{3x}{10a}$.

IV. Calculer les produits suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$\frac{13}{5}\times 5$ $\quad\frac{3}{1000}\times 100$ $\quad\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}$ $\quad\frac{3\pi}{4}\times\frac{6}{\pi}$ $\quad\frac{21}{50}\times\frac{15}{7}$ $\quad\frac{121}{22}\times\frac{4}{55}$ $\quad\frac{12}{20}\times\frac{35}{9}$ $\quad\frac{144}{125}\times\frac{75}{16}$.

$5\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)$; $3\cdot\left(\frac{6}{9}+\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\right)$; $6\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$; $7\cdot\left(\frac{4}{14}+\frac{1}{3}+\frac{7}{9}\right)$; $5\cdot\left(\frac{5}{9}-\frac{7}{15}\right)$; $3\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)$.

$\left(5+\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{5}{8}\right)$; $\left(4-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{30}\right)\cdot\left(6+\frac{3}{4}\right)$; $\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{b}\right)$.

V. Calculer les quotients suivants et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$\frac{5+\frac{1}{4}}{7}$; $\frac{8+\frac{3}{4}}{5}$; $\frac{5+\frac{6}{9}}{17}$; $\frac{5+\frac{4}{7}}{3}$; $\frac{7+\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}$; $\frac{3+\frac{7}{9}}{\frac{5}{6}}$; $\frac{4+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$; $\frac{3+\frac{4}{9}}{\frac{1}{6}}$.

VI. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}$; $\frac{2}{\frac{2}{3}+2}$; $\frac{\frac{5}{2}}{10+\frac{5}{2}}$; $\frac{a+\frac{1}{a}}{a}$; $\frac{a}{\frac{ab+3b^2}{2}}\cdot\frac{b}{2a}$; $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\frac{8}{75}-\frac{5}{12}}$.

$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$; $\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$; $\frac{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$; $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}$.

.

VII. On vend successivement $\frac{1}{3}$, puis $\frac{2}{9}$, puis $\frac{1}{5}$ de la contenance en litre d'une barrique de vin. Le reste est vendu $1{,}50$ € le litre ; le prix de vente de ce reste est 66 €. Quelle est la contenance de la barrique ?

VIII. Trois personnes font un héritage. La première a $\frac{3}{11}$ pour sa part. Les autres se partagent le reste qui est $32\,000$ €. Le deuxième héritier dépense $\frac{2}{7}$ de sa part et le troisième $\frac{4}{9}$ de la sienne ; il reste alors à ces deux personnages des sommes égales.
Quel est le montant de l'héritage et quelle est la part de chacun des trois héritiers ?

IX. Une montre retarde d'un quart de minute pendant le jour mais par suite du changement de température, elle avance d'un tiers de minute pendant la nuit. On la règle aujourd'hui à midi ; dans combien de jours aura-t-elle une avance de deux minutes ? On admettra que le jour et la nuit ont chacun une durée de douze heures.

2) Les puissances

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Si $x \neq 0$: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ et $x^0 = 1$.

Propriétés : Soit n et m deux entiers positifs ou négatifs. Soit x et y deux réels non nuls.

$$x^n x^m = x^{n+m} \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad x^n = \frac{1}{x^{-n}} \qquad x^n y^n = (xy)^n .$$

I. Calculer les quatre premières puissances des nombres suivants :
1 ; -1 ; $+2$; -2 ; $+3$; -3 .

II. Calculer :

$(-2)^3 2^2$; $(-5)^2(-5)$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\frac{3^2}{5^2}\left(-\frac{2}{9}\right)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4\left(-\frac{5}{2}\right)$.

$a^2 \cdot a^4$; $a^4 \cdot a^3$; $a^5 \cdot a$; $-a^3(-a)^5$; $(2^2)^3$; $((-3)^2)^3$; $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$; $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^2$; $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3$; $\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^3$.

$\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^3$; $[(-3)^3 \cdot 5^2]^2$; $\left[3^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2\right]^2$; $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^2$; $\left[(-2) \cdot 10^3\left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]^2$; $\left[-27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2$.

III. Calculer :
$\frac{(-a)^5}{a^3}$; $\frac{(-a)^6}{(-a)^3}$; $\frac{(-a)^9}{(-a)}$; $\frac{(-a)^{2015}}{a}$; $a^3 \cdot a^{-5}$; $a^{-2} \cdot a^{-3}$; $a^{-2} \cdot a^4$; $a^2 \cdot a^{-1}$; $\frac{a^3}{a^{-5}}$; $\frac{a^{-4}}{a^{-2}}$; $\frac{a^4}{a^{-3}}$; $\frac{a^{-3}}{a^{-4}}$.

IV. Calculer :
$\frac{1}{(-2)^{-1}}$; $-\frac{1}{5^{-1}}$; $-\frac{1}{6^{-3}}$; $\frac{1}{6^3}$; $(-1)^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^3$; $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-2}$; $10^{-5} \cdot 10^3$; $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}(-1)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

$\left(-\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3}$; $\frac{25^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{30^6}$; $\frac{9^{-2} \cdot 4^2}{3^{-3} \cdot 6^{-2}}$; $\frac{49^{-2} \cdot 5^6 \cdot 2^3}{7^{-3} \cdot 125^3 \cdot 12}$; $\frac{4^2 \cdot (-12)^2}{(-2)^3 \cdot 6^{-2} \cdot 3^3}$; $\frac{10^{-5} \cdot 25^3}{(-1)^{2015} \cdot 2^{-4}}$.

V. Calculer :
$\frac{4^3}{2^8}$; $\frac{25^3}{(-5)^6}$; $\frac{9^{-1}}{3^{-2}}$; $\frac{4^{65}}{2^{128}}$; $\frac{8^{-5}}{64^{-3}}$; $\frac{12^{-4027}}{144^{-2014}}$; $\frac{2^{2n}}{4^n}$; $\frac{3^{3n}}{27^{3n+1}}$; $\frac{125^{n+1}}{5^{3n-1}}$; $\frac{144^{n-1}}{(12)^{2(n+1)}}$.

3) Les racines

Soit $a \in [0;+\infty[$, il existe un unique réel x tel que $x^2 = a$. On note $\sqrt{a}$ ce réel x.
<u>Propriété</u> :
Soit a et b deux réels positifs:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (b \neq 0), \qquad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Soit a un réel : $\sqrt{a^2} = a$ si a est positif, $\sqrt{a^2} = -a$ si a est négatif.
Soit a un réel strictement positif, n un entier : $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$
<u>Exemple</u> : $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3}\sqrt{25} = 5\sqrt{3}$. $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. $\sqrt{(-2)^2} = 2$.
<u>Attention</u> : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$!!!

I. Simplifier au maximum les nombres suivants.

$\sqrt{1000}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{3^{50}}$; $\sqrt{5}\sqrt{45}$; $\left(\sqrt{8}\right)^5$; $\sqrt{27^3}$; $\sqrt{8}\sqrt{162}$.

$\sqrt{(-1)^4}$; $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-18)}$; $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{27}{50}}$; $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$.

II. Démontrer les égalités suivantes.

$2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$; $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

4) Développer - Factoriser.

$a(b+c) = ab + ac$	***distributivité***
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	***première identité remarquable***
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	***seconde identité remarquable***
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	***troisième identité remarquable***

I. Développer :

$(x^2 - x)(x+1)$; $(2x^2 + x - 4)(x+2)$; $(2x^2 + 3 - 4x)(2x+4)$; $\left(4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

$(x+1)(x-2)(x-3)$; $(3x-2)(2x+3)(5-x)$; $(x-a)(x+b)(x-c)$; $b(x+a-b) - a(x+b-a) - a^2 - b^2$.

$(x-1)(x-a+b) - (1-x)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-a+b)$; $\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4}\right)(4x + 16a)$.

II. Factoriser :

$8a^2 - 24a + 32a^3$; $3a^2x - 6ax^2 + 12abx$; $5a^4b^3 + 2a^2x^3 - 3a^2b^5$; $a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x$; $8x^2y^3 - 3xy^4 + 24x^2y^5$.

$15a^2b^2 - 30a^2b^3 + 105a^2b^4 - 75\,a^2b^5$; $6a^4b^3c^2d - 2a^3b^4c + 8a^5b^2d^3$.

III. Factoriser :

$(2x-3)(5x-1) - (2x-3)(x+1)$; $(7x-1)^2 - (7x-1)(3x+2)$; $(4-3x)(2+3x) - 2(1-2x)(3x-4)$.

$(3x+1)(2x-3) + (3x+1)(x+2) - (5x+4)(3x+1)$; $(x-8)(4x-1) + x^2 - 8x$; $x^2 - x + (x+1)(1-x)$.

IV. Factoriser :

$a^2 - 25$; $4x^2 - 1$; $9x^2 - 4y^2$; $25a^2 - 16b^2$; $5x^3 - 80x$; $4x^2 - a^2y^2$; $49x^2 - 25$; $(a+1)^2 - a^2$; $9x^2 - (x+2)^2$.

$\frac{a^2}{9} - \frac{x^2}{25}$; $\frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2}$; $(3x-4y)^2 - \frac{25}{4}$; $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{x^2}{16}$; $(x+3)^2 - (x+1)^2$; $(a+b)^2 - (a-b)^2$; $(2x+1)^2 - (3x-4)^2$.

$(2x+3)^2 - (1-4x)^2$; $(3x-4)^2 - 4(x+2)^2$; $4(2x+3)^2 - (3x-2)^2$; $25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2$; $(x^2-16)^2 - (x+4)^2$.

V. Factoriser :

$a^4+4a^2b+4b^2$; $4a^2-12ab+9b^2$; $x^2-x+\frac{1}{4}$; $9a^2+\frac{b^2}{4}+3ab$; $9x^2-6x+1$; $4x^2+4x+1$; $4x^2+12xy+9y^2$.

$2x^2-12x+18$; $9b^2+6ab+a^2$; $64a^6-16a^3b+b^2$; $x^2-2x(x+1)+(x+1)^2$; $(1-x)^2+6x+3$.

VI. Simplifier :

$\frac{25x^5y^3}{15x^3y}$; $\frac{64a^4b^2c^3}{48a^2b^3c}$; $\frac{b-ab}{a-a^2}$; $\frac{a^2x^3y-ay^2+a^2xy}{ax^2y}$; $\frac{bx-by}{ax-ay}$; $\frac{2a+2b+2c}{5a+5b+5c}$; $\frac{3x^2-6x}{2x^2-8}$; $\frac{2x-6}{x^2-9}$; $\frac{8x-6x^2}{4x^2+10x}$.

$\frac{9x+3}{9x^2+6x+1}$; $\frac{16x^2-24x+9}{16x^2-9}$; $\frac{16x^2+24x+9}{12x+9}$; $\frac{2x+5}{4x^2+20x+25}$; $\frac{(x+7)^2-x-7}{x+6}$; $\frac{(5x-3)^2-4(2-x)^2}{14x-14}$.

$\frac{(3x-12)(1-x^2)}{(2x-8)(x+1)^2}$; $\frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1}$; $\frac{9+12x+4x^2}{2x+3}$; $\frac{4x^2-1-2(2x-1)^2}{2x-1}$; $\frac{x^2-10x+9}{(x-1)^2-(1-x)(3-2x)}$.

5) Dérivation

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée	commentaires
$x \longmapsto ax+b$ (a, b réels)	$x \longmapsto a$	Sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ (n un entier non nul)	$x \longmapsto nx^{n-1}$	Sur $\mathbb{R}$, si n est positif Sur $\mathbb{R}^*$, si n est négatif
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Sur $\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \ln x$	$x \longmapsto \frac{1}{x}$	Sur $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	Sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées : soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$,

Fonction	dérivée	commentaires
au (a réel)	au'	
$u+v$	$u'+v'$	
uv	$u'v+v'u$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	Sur tout intervalle où $v(x) \neq 0$
u^n n un entier non nul	$nu'u^{n-1}$	Sur tout intervalle où $u(x) \neq 0$, si n est négatif
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	Sur tout intervalle où $u(x) > 0$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$	

I. Calculer les dérivées suivantes :

$f(x)=5-x$ $g(x)=x^3+2x$ $h(x)=-\frac{1}{x}$ $i(x)=1-\sqrt{x}$ $j(x)=\frac{2x+1}{1000}$ $k(x)=x^3\sqrt{x}$;

$l(x)=\frac{3-\frac{1}{2}x}{2014}$ $m(x)=(x^3-1)^2$ $n(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$ $p(x)=(x+1)^2\sqrt{x}$.

II. Calculer les dérivées suivantes :

$f(x)=\frac{x^2+x+1}{-2x+1}$ $g(x)=\frac{\frac{x}{2}+3}{\frac{1}{x}-5}$ $h(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}+4}$ $i(x)=\ln(x)-\frac{1}{x}$ $j(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}$ $k(x)=x\mathrm{e}^{-x+2}$;

$l(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ $m(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ $n(x)=\mathrm{e}^{x\ln(x)}$ $p(x)=\ln(\mathrm{e}^x+1)$.

6) Etude de variations de fonctions.

<u>Propriété</u> : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

i. f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ quelque soit le réel x dans I.
ii. f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ quelque soit le réel x dans I.
iii. Si pour tout réel x dans $I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
iv. f et décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ quelque soit le réel x dans I.
v. Si pour tout réel x dans $I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

<u>Méthode</u> : Soit f une fonction définie et dérivable sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On souhaite étudier les variations de f sur $\mathcal{D}$.

- On calcule $f'(x)$ pour tout réel x dans $\mathcal{D}$.
- On étudie le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}$ en factorisant au maximum l'expression de $f'(x)$. Puis on en déduit les variations de f.

<u>Attention</u> : on donne les variations de f sur chacun des intervalles qui composent la partie $\mathcal{D}$.

Par exemple, il est faux de dire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$; en revanche, elle est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$.

I. Etudier les variations de chacune des fonctions définies sur l'ensemble D.

$$f(x) = x - \ln x, \qquad D =]0; +\infty[. \qquad\qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13, \qquad D = \mathbb{R}. \qquad\qquad i(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$k(x) = x \ln x - x, \quad D =]0; +\infty[. \qquad\qquad l(x) = -(1+x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad D = \mathbb{R}.$$

$$m(x) = -\left(\frac{10x + 27}{25}\right)\mathrm{e}^{-5x}, \quad D = \mathbb{R}.$$

II. Considérons la fonction α définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\alpha(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a. Après avoir calculé les variations de la dérivées α' de α, étudier les variations de α'.
b. En déduire le signe de $\alpha'(x)$ selon les valeurs du réel x.
c. Donner les variations de α.

7) Démontrer une inégalité en étudiant des variations.

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.
On souhaite démontrer une inégalité du type : $\forall x \in \mathcal{D}\ A(x) \leq B(x)$.
Voici une méthode permettant de démontrer cette inégalité.

1. On se ramène à une étude de signe :

$$\text{Soit } x \in \mathcal{D},\ A(x) \leq B(x) \text{ équivaut à } A(x) - B(x) \leq 0.$$

2. On pose pour tout réel x de $\mathcal{D}$, $f(x) = A(x) - B(x)$.
3. On dresse le tableau de variations de f, ce qui permet de déterminer l'éventuel maximum de f.

Si le maximum de f sur $\mathcal{D}$ est négatif, l'inégalité est vérifiée.
On raisonne de la même façon si on pose pour tout $x \in \mathcal{D}$, $g(x) = B(x) - A(x)$ et si le minimum de g sur $\mathcal{D}$ est positif.

Démontrer les inégalités suivantes :

1) $x \geq \mathrm{e}^x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in]-1; +\infty[$.
3) $(1+x)^3 \geq 1 + 3x,\ \forall x \in [-3; +\infty[$.